BSMAT - SN301

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, MARCH-2023
(THIRD SEMESTER) (NEW REGULATION)
MATHEMATICS
Abstract Algebra
(w.e.f. 2020 -21 Admitted Batch)

Time : 3 Hours **Max. Marks : 75**

SECTION - A (5 × 5 = 25)

Answer any five questions. Each question carries five marks.

1. In a group G, if $a \in G$ then prove that $o(a) = o(a^{-1})$

   సమూహము G లోని $a \in G$ మూలకము 'a' అయితే $o(a) = o(a^{-1})$ అని చూపండి.

2. Find the order of each element of the group $G = \{\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \oplus_6\}$.

   $G = \{\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \oplus_6\}$ సమూహము నందు ప్రతిమూలకము యొక్క తరగతిని కనుగొనుము.

3. If H and K are two subgroups of a group G, then prove that $H \cap K$ is also a subgroup of G.

   H మరియు K లు G లో రెండు ఉపసమూహాలు అయితే $H \cap K$ కూడా G లో ఉపసమూహం అవుతుంది అని నిరూపించండి.

4. Prove that every homomorphic image of an abelian group is abelian.

ఎబీలియన్ సమూహము సమరూపత ప్రతిబింబము ఎబీలియన్ సమూహము అని నిరూపించండి

5. Prove that every cyclic group is abelian.

ప్రతీ చక్రీయ సమూహం ఎబీలియన్ సమూహము అవుతుందని నిరూపించండి.

6. Show that every field is an integral domain.

ప్రతిక్షేత్రము ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశము అని చూపండి.

7. If f is a homomorphism of a ring R into a ring R′. Then show that Kerf is an ideal of R.

$f : R \to R'$ వలయ సమరూపతా యొక్క Kerf R వలయానికి ఆదర్శమవుతుందని చూపండి

8. Prove that the field has no zero divisors.

ఒకక్షేత్రం శూన్యభాజకాలను కలిగి ఉండదు అని నిరూపించండి.

SECTION - B $(5 \times 10 = 50)$

Answer all questions. Each question carries Ten marks.

9. a) Show that n^{th} roots of unity form an abelian group under multiplication.

1 యొక్క nవ మూలాల సమితి గుణకారం దృష్ట్యా ఎబీలియన్ సమూహము అవుతుందని చూపండి.

OR

b) Prove that a finite semi group (G, *) satisfying cancellation laws is a group.

పరిమిత అర్ధసమూహము (G, *) లో కొట్టివేత న్యాయాలు నిజమైన G ఒక సమూహము అవుతుందని చూపండి.

10. a) Prove that a finite non-empty subset H of a group G, is a subgroup of G iff $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$.

సమూహము G యొక్క పరిమిత శూన్యేతర ఉపసమితి H, G నకు ఉపసమూహము కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$ అని నిరూపించండి.

OR

b) State and prove Lagrange's theorem for finite groups.

పరిమిత సమూహాల పై లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

11. a) Define quotient group. Prove that the set G/H of all cosets of H in G w.r.t coset multiplication is a group.

వ్యుత్పన్న సమూహము నిర్వచించండి. సమూహము G లో H యొక్క అన్ని సహసమితుల సమితి G/H సహసమితుల గుణకారము దృష్ట్యా సమూహము అవుతుందని చూపండి.

OR

b) State and prove the fundamental theorem of homomorphism of groups.

సమూహపు సమరూపతలపై ప్రాథమిక సమరూపతా సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి

12. a) State and prove Caylay's theorem.

కెయిలే సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

OR

b) Define cyclic group. Prove that the order of a cyclic group is equal to the order of its generators.

చక్రీయ సమూహమునకు నిర్వచనము వ్రాయండి. ఒక చక్రీయ సమూహము తరగతి దాని జనక మూలకము తరగతి సమానము అని చూపుము.

13. a) Prove that every finite integral domain is a field.

ఒక పరిమిత పూర్ణాంక ప్రదేశము క్షేత్రము అవుతుందని చూపండి.

OR

b) Prove that every ideal of Z is a principal ideal.

Z యొక్క ప్రతి ఆదర్శం ఒక ప్రధాన ఆదర్శం అని చూపండి.

◆◆◆