[Total No. of Pages : 4

BSMAT-SN401

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, JULY/AUGUST - 2023
(FOURTH SEMESTER) (CBCS PATTERN) (Regular)
MATHEMATICS (Paper - IV)
Real Analysis
(Note : 2021-22 Admitted Students Have to Answer the Questions in English Medium only)

Time : 3 Hours **Max. Marks : 75**

SECTION - A (5 × 5 = 25)

Answer any five questions. Each question carries five marks.

1. Prove that the sequence $\{S_n\}$ where $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n+n}$ is convergent.

   $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n+n}$ గా గల $\{S_n\}$ అనుక్రమం అభిసరిస్తుందని చూపండి.

2. Test for convergence of $\sum \sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}$.

   $\sum \sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}$ యొక్క అభిసరణను పరీక్షించండి.

3. Examine the continuity of the function f defined by $f(x) = |x| + |x-1|$ at $x = 0,1$.

   $x = 0,1$ ల వద్ద $f(x) = |x| + |x-1|$ గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయము యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను పరీక్షించండి.

4. Show that $f(x) = x \sin(1/x), x \neq 0; f(x) = 0, x = 0$ is continuous but not derivable at $x = 0$.

$f(x) = x \sin(1/x), x \neq 0; f(x) = 0, x = 0$ ప్రమేయము వద్ద $x = 0$ ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నం అవుతుంది కాని అవకలనీయము కాదు అని చూపండి.

5. Verify Rolle's theorem on [a, b] for $f(x) = (x - a)^m (x - b)^n$ m,n are +ve integers.

[a, b] లో $f(x) = (x - a)^m (x - b)^n$ ప్రమేయానికి రోలె సిద్ధాంతమును పరిశీలించండి.

6. If $f \in R[a, b]$ and m, M are the infimum and supremum of f on $[a, b]$, then show that $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

$f \in R[a, b]$ మరియు $[a, b]$ మీద f యొక్క గ.ది.హ. మరియు క.ఎ.హ.లు m,M లు అయితే $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$ అని చూపండి.

7. If $f \in R[a, b]$ then show that $|f| \in R[a, b]$.

$f \in R[a, b]$ అయితే $|f| \in R[a, b]$ అని చూపండి.

8. Prove that $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{3n}\right]=\log 3$.

$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{3n}\right]=\log 3$ అని చూపండి.

SECTION - B (5 × 10 = 50)

Answer all the questions. Each question carries 10 marks

9. a) Prove that a monotone sequence is convergent if and only if it is bounded.

ఏక దిష్టానుక్రమం అభిసరిస్తుంది ⇔ అది పరిబద్ధము అని చూపండి.

OR

b) State and prove Cauchy's first theorem on limits.

Prove that $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+2^{1/2}+3^{1/3}+....+n^{1/n}\right]=1$.

అవధుల పై కోషి మొదటి సిద్ధాంతము వ్రాసి నిరూపించండి. మరియు

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+2^{1/2}+3^{1/3}+....+n^{1/n}\right]=1$ అని నిరూపించండి.

10. a) State and prove Cauchy's n^{th} root test.

కోషి మూల పరీక్ష ప్రవచించి, నిరూపించుము.

OR

b) Test for convergence $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ అభిసరణతను పరీక్షించండి.

11. a) Prove that $f : I = [a, b] \to R$ is continuous on $[a, b]$ then f is bounded on $[a, b]$ and attains its bounds.

$f : I = [a, b] \to R$ ప్రమేయం $[a, b]$ లో అవిచ్ఛిన్నమయితే f ప్రమేయం $[a, b]$ లో పరిబద్ధం అవుతూ దాని గ.ది.హ. మరియు క.ఎ.హ.లను పొందుతుంది అని చూపండి.

OR

b) Discuss the continuity of $f(x) = x \sin(yx) - 1$, if $x \neq 0$ and $f(0) = 0$ at the origin.
మూల బిందువు వద్ద $f(x) = x \sin(yx) - 1, x \neq 0, f(0) = 0$ ప్రమేయానికి అవిచ్ఛిన్నతను వివరింపుము.

12. a) State and prove Cauchy's mean value theorem.
కోషి-మధ్యమ విలువల సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

OR

b) Using Lagrange's theorem, show that

1+ $x > \log(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$ for all $x > 0$.

లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతమునుపయోగించి ప్రతి $x > 0$ కు $x > \log(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$ అని చూపండి.

13. a) State and prove fundamental theorem of Integral calculus.
సమాకలన మూల సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించుము.

OR

b) Prove that $\dfrac{1}{\pi} \leq \int_0^1 \dfrac{\sin \pi x}{1+x^2} \leq \dfrac{2}{\pi}$ అని చూపండి.

x x x