BSMAT-SN402

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, JULY/AUGUST - 2023

(FOURTH SEMESTER) (CBCS Pattern)

MATHEMATICS (Paper - V) (Regular)

Linear Algebra

(Note : 2021-22 Admitted Students Have to Answer the Questions in English Medium only)

Time : 3 Hours **Max. Marks : 75**

SECTION - A (5 × 5 = 25)

Answer any five questions.

Each question carries Five marks

1. Prove that the linear span L(S) of any subject S of a vector space V(F) is a subspace of V(F).

   V(F) సదిశాంతరాళంలో ఏదైనా ఉపసమితి S యొక్క ఋజు వ్యాప్తి L(S), V(F) యొక్క ఉపాంతరాళము అని చూపండి.

2. If w_1 and w_2 are two subspaces of a vector space V(F) then $w_1 \cap w_2$ is also a subspace of V(F).

   సదిశాంతరాళం V(F) లో w_1 మరియు w_2 లు రెండు ఉపాంతరాళలు అయిన $w_1 \cap w_2$ కూడా మరలా V(F) ఉపాంతరాళం అగునని చూపిండి.

3. State and prove invariance theorem.

సిద్ధాంతమును ప్రవచించి ఇన్వేరియన్స్ నిరూపించుము.

4. Prove that every set of $(n+1)$ or more vectors in an n dimensional vector space is linearly dependent.

n పరిమాణం అయిన V(F) సదిశాంతరాళంలో $(n+1)$ లేదా ఎక్కువ సదిశల సమితి ఋజుస్వాతంత్ర్యము అని చూపుము.

5. If $T : U(F) \rightarrow V(F)$ is a linear transformation, then show that R(T) is a subspace of V(F).

$T : U(F) \rightarrow V(F)$ ఋజు పరివర్తన అయితే, V(F) కి R(T) ఉపాంతరాళమని చూపుము.

6. Find a unit vector orthogonal to (4, 2, 3) in R^3 with respect to the standard inner product.

R^3 అంతరాళంలో (4, 2, 3) సదిశకు లంబంగా వుండే యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

7. Prove that $S = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} \right) \right\}$ is an orthonormal set in R^3.

$S = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} \right) \right\}$ R^3 లో ఒక లంబాధిభిలంబ సమితి అని ఋజువు చేయండి.

8. Find rank of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

పై మాత్రికకు కోటిని కనుక్కోండి.

SECTION - B (5 × 10 = 50)

Answer all the questions.

Each question carries TEN marks.

9\. a) Prove that the union of two subspaces in a subspace if and only if one is contained in the other.

రెండు ఉపాంతరాళము సమ్మేళనము ఉపాంతరాళమగుటకు ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము ఒకటి మరియొక్క దానికి ఉపసమితి అని చూపుము.

OR

b) Let V(F) be a vector space and a non-empty set $W \subseteq V$. Show that the necessary and sufficient condition for W to be a subspace of V is $a, b \in F$ and $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$.

V(F) సదిశాంతరాళము W అశూన్య ఉపసమితి V కి W ఉపాంతరాళము అగుటకు ఆవశ్యక, పర్యాప్తి నియమములు a, $b \in F$ మరియు $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$ అని చూపుము.

10. a) If m and n are dimensions of the subspace W and the vector space V respectively, then show that

$\dim V/W = \dim V - \dim W = n - m.$

m మరియు n అనునవి వరుసగా ఉపాంతరాళము W మరియు సదిశాంతరాళం V యొక్క పరిమాణాలయితే,

$\dim V/W = \dim V - \dim W = n - m$ అని చూపండి.

OR

b) Let V(F) be a finite dimensional vector space of dimensional n and w be a subspace of V. Then prove that W is a finite dimensional vector space with $\dim W \leq n$.

పరిమిత పరిమాణపు సదిశాంతరాళం V(F) నకు పరిమాణం n అనుకోండి. V నకు W ఒక ఉపాంతరాళం W కూడా $\dim W \leq n$ అగునట్లు పరిమిత సదిశాంతరాళము.

11. a) State and prove Rank - Nullity theorem.

కోటి - శూన్యత సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

OR

b) Find the null space, range, rank and nullity of the linear combination $T : R^2 \to R^3$ is defined by $T(x,y) = (x+y, x-y, y)$.

$T(x,y) = (x+y, x-y, y)$ గా నిర్వచించబడిన $T : R^2 \to R^3$ ఒక ఏకఘాతి రూపాంతరణమని చూపండి T యొక్క కోటి, శూన్యాతాంతరాళము శూన్యత్వములను కనుక్కోండి.

12. a) State and prove Cayley - Hamilton theorem.

కేలీ - హేమిల్టన్ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

OR

b) If $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ verify Cayley - Hamilton theorem and hence find A^{-1}.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ కేలీ హేమిల్టన్ సిద్ధాంతాన్ని వాడి దాని యొక్క మాత్రిక A^{-1} కనుగొనండి.

13. a) State and prove Bessel's Inequality.

బెస్సెల్స్ అసమానతను ప్రవచించి నిరూపించండి.

OR

b) If $\{(2, 1, 3), (1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$ is a basis of R^3, construct an orthonormal basis.

R^3 నకు $\{(2, 1, 3), (1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$ ఒక ఆధారమయితే ఒక లంబాభిలంబ ఆధారంను నిర్మించండి.

x x x