BSMAT-SN301

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, JULY - 2022
MATHEMATICS
Abstract Algebra
(Semester-III) (New Regulation) (CBCS Pattern)
(w.e.f. 2020-2021 Admitted Batch)

Time : 3 Hours **Max. Marks : 75**

SECTION - A (5 × 5 = 25)

Answer any five questions. Each question carries five marks

1. If G is an abelian group, then show that $(ab)^n = a^n b^n \ \forall a,b \in G$ where $n \in z$.

   G ఒక వినిమయ సమూహము మరియు $n \in z$ అయితే $(ab)^n = a^n b^n \ \forall a,b \in G$ అని చూపండి.

2. In the multiplicative group $G = \{1,-1,i,-i\}$, find the order of the each element.

   గుణన సమూహము $G = \{1,-1,i,-i\}$ నందు, ప్రతి మూలకము యొక్క తరగతి కనుగొనుము.

3. Define normal subgroup. Prove that every subgroup of an abelian group is normal.

   అభిలంబ ఉపసమూహమును నిర్వచింపుము. ఎబిలియన్ సమూహములో ప్రతి ఉపసమూహము అభిలంబమే అని నిరూపించండి.

4. If f is homomorphism of a group G into group G′ than show that Kernel of f is normal sub-group of G.

   సమూహము G నుండి సమూహము G′ కి f అనునది సమరూపతే అయితే f యొక్క కెర్నల్ G లో అభిలంబ ఉపసమూహము అని చూపండి.

5. Show that every subgroup of a cyclic group is cyclic.
ఒక చక్రీయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉపసమూహము చక్రీయము అని చూపండి.

6. Show that every field is an Integral domain.
ప్రతి క్షేత్రము ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశము అని చూపండి.

7. If F is a field, then prove that $\{0\}$ and F are the only ideals of F.
F అనే క్షేత్రానికి $\{0\}$, F లు మాత్రమే ఆదర్శాలు అని నిరూపించండి.

8. If H is a subgroup of G, then prove that $H = H^{-1}$. Is converse true?
సమూహము G లో H ఒక ఉపసమూహము అయితే $H = H^{-1}$ అని నిరూపించండి. విపర్యయం నిజమగునా?

SECTION - B (5×10=50)

Answer All questions. Each question carries ten marks.

9. a) If $G = Q - \{1\}$ and * is defined on G as $a*b = a+b+ab$ $\forall$ $a,b \in G$, then show that (G, *) is an abelian group.
$G = Q - \{1\}$ కి సమానముకాని ఆకర్షణీయ సంఖ్యల సమితి 'G' పై * అనే పరిక్రియను $a*b = a+b+ab$ $\forall$ $a,b \in G$ అని నిర్వచించిన (G, *) ఒక వినిమయ సమూహాము అవుతుందని చూపండి.

OR

b) Define quotient group. Prove that the set G/H of all cosets of H in G w.r.t. coset multiplication is a group.

వ్యుత్పన్న సమూహము నిర్వచించండి. సమూహము G లో H యొక్క అన్ని సహసమితుల సమితి G/H సహసమితుల గుణకారము దృష్ట్యా సమూహము అవుతుందని చూపండి.

10. a) If H and K are two subgroups of a group G, then show that $H \cup K$ is a subgroup of G iff either $H \subseteq K$ or $K \subseteq H$.

H మరియు K లు సమూహము G కి ఉపసమూహములు అయిన, $H \cup K$ ఆ సమూహములో ఉపసమూహము కావలెనన్న ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $H \subseteq K$ లేదా $K \subseteq H$ అవుతుంది.

OR

b) State and prove Lagrange's theorem for finite groups.

పరిమిత సమూహాల పై లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

11. a) If M, N are two normal subgroups of G show that $M \cap N = \{e\}$. Then show that every element of M comments with every element of N.

G లో M, N లు $M \cap N = \{e\}$ అయ్యేటట్లు అభిలంబ ఉపసమూహములు అయితే M లోని ప్రతి మూలకము N లోని ప్రతి మూలకముతో వినిమయము అవుతుందని చూపండి.

OR

b) State and prove fundamental theorem of homomorphism of groups.

సమూహపు సమరూపతల పై ప్రాథమిక సమరూపతా సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

12. a) Prove that a subgroup H of a group G is a normal subgroup of G iff the product of two right cosets of H in G is again a right coset of H in G.

ఒక సమూహము G కి ఉపసమూహం H అభిలంబ సమూహం అగుటకు ఆవశ్యకపర్యాప్తక నియమము ప్రతి రెండు కుడి కోసెట్ యొక్క లబ్దము కుడి కోసెట్ అగునని చూపుము.

OR

b) Define cyclic group. State and prove Cayley's theorem.

చక్రీయ సమూహమునకు నిర్వచనము వ్రాయండి. కేలీ సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించుము.

13. a) Prove that $\theta\sqrt{2} = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in \theta\}$ is a field.

$\theta\sqrt{2} = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in \theta\}$ అనునది క్షేత్రము అవుతుందని చూపండి.

OR

b) Show that a finite Integral domain is a field.

ఒక పరిమిత పూర్ణాంక ప్రదేశము క్షేత్రము అవుతుందని చూపండి.

✪ ✪ ✪