BSMAT - SN401

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOV./DEC. - 2022
(FOURTH SEMESTER) (CBCS Pattern)
MATHEMATICS (Paper - IV)
Real Analysis
(w.e.f. 2020-2021 Admitted Batch)

Time : 3 Hours **Max. Marks : 75**

SECTION - A (5 × 5 = 25)

Answer any **Five** questions.
Each question carries FIVE marks.

1. If $S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ prove that $\lim S_n = 0$.

   $S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ అయిన $\lim S_n = 0$ అని నిరూపించండి.

2. Test for convergence $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

   $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ అభిసరణతను పరీక్షించండి.

3. Show that the function $f(x) = x^3$ is uniformly continuous in $[-2, 2]$.

   $f(x) = x^3$ అను ప్రమేయము $[-2, 2]$ లో ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నము అని చూపండి.

4. Show that the function $f(x) = |x| + |x-1|$ is continuous at $x = 0, 1$ but not desirable at $x = 0, 1$.

   $f(x) = |x| + |x-1|$ ప్రమేయము $x = 0, 1$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అవుతుంది కాని అవకలనీయము కాదు అని చూపండి.

5. Examine the applicability of Rolle's theorem for $f(x)=1-(x-1)^{2/3}$ on [0, 2].

$[0,2]$ లో $f(x)=1-(x-1)^{2/3}$ ప్రమేయానికి రోలె సిద్ధాంతమును పరిశీలించండి.

6. If $f\in R[a,b]$ and m, M are the infimum and supramum of f on $[a, b]$, then show that $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

$f\in R[a,b]$ మరియు $[a, b]$ మీద f యొక్క గ.ది.హ మరియు క.ఎ.హ.లు m, Mలు అయితే $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$ అని చూపండి.

7. Show that if $\{S_n\}$ is a Cauchy sequence than $\{S_n\}$ is convergent.

$\{S_n\}$ ఒక కోషి అనుక్రమము అయితే $\{S_n\}$ అభిసరిస్తుందని చూపండి.

8. If $f,g\in R[a,b]$ then prove that $(f.g)\in R[a,b]$.

$f,g\in R[a,b]$ అయిన $(f.g)\in R[a,b]$ అని నిరూపించండి.

SECTION - B (5 × 10= 50)

Answer all questions.
Each question carries TEN marks.

9. a) i) Show that

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]=1$$ అని

చూపండి

ii) A sequence is convergent iff it is a Cauchy sequence.

అనుక్రమము అభిసరణ చెందడానికి కోషిఅనుక్రమం తుల్యము.

OR

b) Prove that a monotone sequence is convergent if and only if it is bounded.

ఏకదిష్టానుక్రమం అభిసరిస్తుంది $\Leftrightarrow$ అది పరిబద్ధము అని చూపండి.

10. a) State and Prove D'Alembert's Ratio Test.

D' అలంబర్ట్ నిష్పత్తి పరీక్షను నిర్వచించి నిరూపించుము.

OR

b) Test for convergence $\sum \frac{x^n}{x^n + a^n} (x > 0, a > 0)$.

$\sum \frac{x^n}{x^n + a^n} (x > 0, a > 0)$ అభిసరణతను పరీక్షించండి.

11. a) If a function f is continuous on $[a, b]$ then prove it is uniformly continuous on $[a, b]$.

$[a, b]$ మీద f ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నమయితే, అప్పుడు అది $[a, b]$ మీద ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నము అని చూపండి.

OR

b) Find the points of discontinuity of $f(x) = \frac{1}{2^n}$ for $\frac{1}{2^{n+1}} < x \le \frac{1}{2^n}$ when $n = 0, 1, 2 \ldots$ and $f(0) = 0$.

$f(x) = \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}} < x \le \frac{1}{2^n}, n = 0, 1, 2 \ldots$ మరియు $f(0) = 0$ ప్రమేయం యొక్క విచ్ఛిన్నతా బిందువులు కనుక్కోండి.

12. a) State and prove Cauchy's Mean value theorem.
కోషి-మధ్యమ విలువల సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

OR

b) Using Lagrange's mean value theorem.
Prove that $10.22 < \sqrt{105} < 10.25$.
లెగ్రాంజ్ మాధ్యమ విలువల సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి
$10.22 < \sqrt{105} < 10.25$ అని చూపండి.

13. a) State and prove necessary and sufficient condition for Riemann Integrability.
రీమాన్ సమాకలనీయతకు ఆవశ్యకత పర్యాప్త నియమము వ్రాసి నిరూపించండి.

OR

b) Prove that $\frac{\sqrt{3}}{8} \le \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\sqrt{2}}{6}$.

$\frac{\sqrt{3}}{8} \le \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\sqrt{2}}{6}$ అని చూపండి.

***