23-1-24.

[Total No. of Pages : 8

BSMAT-SN501

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, JANUARY - 2024
MATHEMATICS
Multiple Integrals and Applications of Vector Calculus
(Semester - V) (CBCS Pattern) (Regular)
(w.e.f. 2020-2021 Admitted Batch)

Time : 3 Hours **Max. Marks : 75**

SECTION - A

Very short answer questions. Answer All questions : - (5 × 2 = 10)

1. Evaluate $\int_0^3\int_0^2 xy(x+y)\,dy\,dx$ ను గణించండి.

2. Evaluate $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$ ను గణించండి.

3. Show that $\text{curl}\,\overline{r}=0$ అని చూపండి.

4. If $\overline{f}(t)=(t-t^2)\overline{i}+2t^3\overline{j}-3\overline{k}$ then find $\int_1^2 \overline{f}(t)\,dt$.

   $\overline{f}(t)=(t-t^2)\overline{i}+2t^3\overline{j}-3\overline{k}$ అయితే $\int_1^2 \overline{f}(t)\,dt$ ను కనుక్కోండి.

5. Apply Gauss's theorem to prove that $\int_s \bar{r}\cdot\bar{N}\, d\bar{s} = 3\bar{V}$.

గాస్ సిద్ధాంతాన్ని వర్తింపజేసి $\int_s \bar{r}\cdot\bar{N}\, d\bar{s} = 3\bar{V}$ అని నిరూపించండి.

SECTION - B

Answer any five questions (5×5=25)

6. Evaluate $\iint xy(x+y)\,dx\,dy$ over the area between $y=x^2$ and $y=x$.

$y=x^2$ మరియు $y=x$ మధ్య వైశాల్యం దృష్ట్యా $\iint xy(x+y)\,dx\,dy$ ను గణించండి.

7. Change into Polar coordinates and evaluate $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

ధృవ నిరూపకాలుగా మార్చుతూ, $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ ను గణించండి.

8. Find the area bounded by $x^2 = 4y$ and $x - 2y + 4 = 0$ using double integral.

$x^2 = 4y$ మరియు $x - 2y + 4 = 0$ లచే పరిబద్ధమైన వైశాల్యాన్ని ద్విసమాకలని ద్వారా ఉపయోగించి కనుక్కోండి.

9. If $a = x+y+z$, $b = x^2+y^2+z^2$, $c = xy+yz+zx$ then show that $[\nabla a\ \nabla b\ \nabla c] = 0$.

$a = x+y+z$, $b = x^2+y^2+z^2$, $c = xy+yz+zx$ అయితే $[\nabla a\ \nabla b\ \nabla c] = 0$ చూపండి.

10. Find $\operatorname{div}\bar{F}$ and $\operatorname{curl}\bar{F}$ where $\bar{F} = xy^2\bar{i} + 2x^2yz\bar{j} - 3yz^2\bar{k}$ at $(1, -1, 1)$.

$(1, -1, 1)$ వద్ద $\bar{F} = xy^2\bar{i} + 2x^2yz\bar{j} - 3yz^2\bar{k}$ అయిన $\operatorname{div}\bar{F}$ మరియు $\operatorname{curl}\bar{F}$ ను కనుక్కోండి.

11. Evaluate $\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$ where C is the circle $x^2+y^2=1$, $z=0$ and $\bar{F} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$.

ఇచ్చట C ఒక గోళము $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ మరియు $\bar{F} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$ అయిన $\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$ ను గణించండి.

[P.T.O.

12. Show that

$$\iint_S (ax\,dy\,dz + by\,dz\,dx + cz\,dx\,dy) = \frac{4}{3}\pi(a+b+c),$$

where S is the surface of the sphere $x^2+y^2+z^2=1$.

$x^2+y^2+z^2=1$ అను గోళతలం S పై

$$\iint_S (ax\,dy\,dz + by\,dz\,dx + cz\,dx\,dy) = \frac{4}{3}\pi(a+b+c)$$ అని

చూపండి.

13. Evaluate by Green's theorem

$\oint_C (x^2-\cosh y)\,dx + (y+\sin x)\,dy$, where C is the rectangle with vertices $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(\pi,1)$, $(0,1)$.

గ్రీన్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(\pi,1)$, $(0,1)$ శీర్షాలుగా గల చతుర్భుజం C దృష్ట్యా

$\oint_C (x^2-\cosh y)\,dx + (y+\sin x)\,dy$ విలువను రాబట్టండి.

SECTION - C

Answer All questions. Each question carries 8 marks (5 × 8 = 40)

14. a) Evaluate $\iint (x+y)^2\,dx\,dy$ over the area bounded by the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ అనే దీర్ఘవృత్తంచే పరిబద్ధమైన వైశాల్యం దృష్ట్యా $\iint (x+y)^2\,dx\,dy$ ను గణించండి.

OR

b) Change the order of integration and evaluate $\int_0^1\int_1^{e^x} dy\,dx$.

$\int_0^1\int_1^{e^x} dy\,dx$ ను గణన సమాకలన క్రమాన్ని మార్చి తద్వారా చేయండి.

[P.T.O.

15\. a) Evaluate $\iiint (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ taken over the volume enclosed by the sphere $x^2+y^2+z^2=1$.

$x^2+y^2+z^2=1$ గోళము యొక్క ఘన పరిమాణం యొక్క పరివేష్టిత అయిన $\iiint (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ ను గణించండి.

OR

b) Find the volume bounded by the cylinder $x^2+y^2=4$ and the planes $y+z=4$ and $z=0$ by using double integral.

$x^2+y^2=4$ అను స్థూపము మరియు $y+z=4$ మరియు $z=0$ అను తలాలచే పరిబద్ధమైన ఘనపరిమాణాన్ని ద్విసమాకలనాన్ని ఉపయోగించి కనుక్కోండి.

16\. a) If $\bar{A}$ and $\bar{B}$ are two differentiable vector point functions then prove that $\text{grad}(\bar{A}\cdot\bar{B}) = (\bar{B}\cdot\nabla)\bar{A} + (\bar{A}\cdot\nabla)\bar{B} + \bar{B}\times(\text{curl}\,\bar{A}) + \bar{A}\times(\text{curl}\,\bar{B})$.

$\bar{A}$ మరియు $\bar{B}$ లు రెండు అవకలన సదిశా బిందు ప్రమేయాలు అయితే $\text{grad}(\bar{A}\cdot\bar{B}) = (\bar{B}\cdot\nabla)\bar{A} + (\bar{A}\cdot\nabla)\bar{B} + \bar{B}\times(\text{curl}\,\bar{A}) + \bar{A}\times(\text{curl}\,\bar{B})$ అని చూపండి.

OR

b) If $\bar{a}$ is a constant vector then show that

$$\text{curl}\left(\frac{\bar{a}\times\bar{r}}{r^3}\right) = \frac{-\bar{a}}{r^3} + \frac{3\bar{r}}{r^5}(\bar{a}\cdot\bar{r})$$

$\bar{a}$ ఒక స్థిర సదిశ అయితే $\text{curl}\left(\frac{\bar{a}\times\bar{r}}{r^3}\right) = \frac{-\bar{a}}{r^3} + \frac{3\bar{r}}{r^5}(\bar{a}\cdot\bar{r})$ అని చూపండి.

17\. a) Evaluate $\int_S \bar{F}\cdot\bar{N}\,ds$, where $\bar{F} = 18z\bar{i} - 12\bar{j} + 3y\bar{k}$ and S is the part of the plane $2x+3y+6z=12$ located in first octant.

$\bar{F} = 18z\bar{i} - 12\bar{j} + 3y\bar{k}$ అయి ప్రథమాష్టమంలోని $2x+3y+6z=12$ తలభాగం S అయితే $\int_S \bar{F}\cdot\bar{N}\,ds$, గణించండి.

OR

b) If $\phi = 45x^2y$, evaluate $\iiint_V \phi\,dV$, where V is the closed region bounded by the plane $4x+2y+z=8$, $x=0, y=0, z=0$.

$\phi = 45x^2y$ అయితే $4x+2y+z=8$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ తలాలచే పరిబద్ధమైన సంవృత ఆవరణము V అయితే $\iiint_V \phi\,dV$ ను గణించండి.

18. a) State and prove Gauss Divergence theorem.

గాస్ - అపసరణ సిద్ధాంతాన్ని వ్రాసి మరియు నిరూపించండి.

OR

b) Verify Stoke's theorem for $\overline{A} = 2y\overline{i} + 3x\overline{j} - z^2\overline{k}$ where S is the upper half surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ and C is its boundary.

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ అను గోళ ఊర్ధ్వార్ధ భాగం S దాని తలసీమ C అయితే $\overline{A} = 2y\overline{i} + 3x\overline{j} - z^2\overline{k}$ ప్రమేయానికి స్టోక్స్ సిద్ధాంతం సరిచూపండి.

x x x