

BSMAT-MJ304

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOV./DEC. - 2024
MATHEMATICS

Special Functions and Problem Solving Sessions

(Semester - III) (Major)

(w.e.f. 2023 - 2024 Admitted Batch)

Time : 3 Hours

Max. Marks : 75

SECTION - A

Answer any Five of the following questions. (5 × 4 = 20)

1. Evaluate $\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$.

$\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$ ను గణించండి.

2. Prove that $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$.

$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$ అని నిరూపించండి.

3. Show that $x = 0$ is an ordinary point of $y'' - xy' + 2y = 0$.

$y'' - xy' + 2y = 0$ యొక్క సాధారణ బిందువు $x = 0$ అని చూపండి.

4. Find the radius of convergence of the series $\sum \frac{2^n x^n}{n!}$.

$\sum \frac{2^n x^n}{n!}$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణతా వ్యాసార్థాన్ని కనుక్కోండి.

SA-845

[1]

[P.T.O.]

BSMAT-MJ304

5. Prove that $H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$.

$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$ అని నిరూపించండి.

6. Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx$.

$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx$ ను గణించండి.

7. Prove that $n p_n(x) = x p_n'(x) - p_{n-1}'(x)$.

$n p_n(x) = x p_n'(x) - p_{n-1}'(x)$ అని నిరూపించండి.

8. Prove that $\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$.

$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$ అని నిరూపించండి.

SECTION - B

Answer All of the following questions.

(5×10=50)

9. a) Prove that $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \times \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \times \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ అని నిరూపించండి.

OR

SA-845

[2]

BSMAT-MJ304

- b) State and prove first four chebyshev polynomials.
మొదటి నాలుగు చెబిషెవ్ బహుపదులను ప్రవచించి మరియు నిరూపించండి.

10. a) Solve by power series method $y' - y = 0$.

పవర్ శ్రేణి పద్ధతి ద్వారా $y' - y = 0$ ను సాధించండి.

OR

- b) Find the series solution of $(1 - x^2)y'' + 2y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 5$.

$(1 - x^2)y'' + 2y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 5$ యొక్క శ్రేణి సాధనను కనుక్కోండి.

11. a) Prove that $e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$.

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \text{ అని నిరూపించండి.}$$

OR

- b) Prove that $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \text{ అని నిరూపించండి.}$$

[P.T.O.]

BSMAT-MJ304

12. a) Prove that $\int_{-1}^1 p_m(x) \cdot p_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$.

$$\int_{-1}^1 p_m(x) \cdot p_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases} \text{ అని నిరూపించండి.}$$

OR

- b) State and prove generating function for $p_n(x)$.
 $p_n(x)$ యొక్క జనరేటర్ ఫంక్షన్ను ప్రవచించి మరియు నిరూపించండి.

13. a) Prove that $\sqrt{\left(\frac{\pi x}{2}\right)} J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{x} \sin x - \cos x$.

$$\sqrt{\left(\frac{\pi x}{2}\right)} J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{x} \sin x - \cos x \text{ అని నిరూపించండి.}$$

OR

b) Prove that $2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$.

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \text{ అని నిరూపించండి.}$$

x x x x