BSMAT-MI301

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOV./DEC. - 2024
MATHEMATICS
Group Theory & Problem Solving Sessions
(Semester - III) (Minor)
(w.e.f. 2023 - 2024 Admitted Batch)

Time : 3 Hours   Max. Marks : 75

SECTION - A

Answer any Five of the following questions. (5×5=25)

1. Show that, in a group G, the identity element is unique.

   సమూహము G లో, తత్సమ మూలకము ఏకైకమని చూపండి.

2. In a group G, if $a^2 = e$ for every $a \in G$. Prove that G is an abelian group.

   సమూహము G లో, ప్రతి $a \in G$ కు $a^2 = e$ అయితే G అనునది వినిమయ సమూహము అని నిరూపించండి.

3. If H is a subgroup of a group G, then prove that HH = H.

   H అనునది, G సమూహము యొక్క ఉపసమూహము అయితే HH = H అని నిరూపించండి.

4. If H and K are two subgroups of a group G, then show that $H \cup K$ is a subgroup of G if and only if either $H \subseteq K$ or $K \subseteq H$.

   సమూహము G కు H మరియు K లు ఉపసమూహాలైతే సమూహము G కు $H \cup K$ కూడా ఉపసమూహము కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $H \subseteq K$ లేదా $K \subseteq H$ అని చూపండి.

5. If M and N are normal subgroups of a group G, then show that MN is also a normal subgroup of G.
సమూహము G కు M మరియు N లు అభిలంబ ఉపసమూహాలైతే, G కు MN కూడా అభిలంబ సమూహము అవుతుందని చూపండి.

6. Prove that every homomorphic image of a group is a group.
సమూహము యొక్క ప్రతి సమరూపతా ప్రతిబింబం సమూహము అవుతుందని నిరూపించండి.

7. Show that the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 8 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ is even.
ప్రస్తారం $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 8 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ అనునది సరి అని చూపండి.

8. Find the number of generator of a cyclic group of order 15.
తరగతి 15 గల చక్రీయ సమూహానికి జనక మూలకాల సంఖ్యను కనుక్కోండి.

SECTION - B

Answer All of the following questions. (5×10=50)

9. a) If G is a group and $a, b \in G$ then prove that the equations $ax = b$ and $ya = b$ have a unique solution.
G ఒక సమూహము మరియు $a, b \in G$ అయిన $ax = b$ మరియు $ya = b$ సమీకరణాలకు ఏకైక సాధన ఉండునని చూపండి.

OR

b) If G is an abelian group then show that $(ab)^n = a^n \cdot b^n \ \forall\ a, b \in G$, where $n \in Z$.
G ఒక వినిమయ సమూహం అయితే $(ab)^n = a^n \cdot b^n \ \forall\ a, b \in G, n \in Z$ అన్ని చూపండి.

10. a) Prove that a non-empty complex H of a group G is a subgroup of G if and only if $ab^{-1} \in H \forall a, b \in H$.
సమూహము G లో H అను శూన్యేతర సమితి G కు ఉపసమూహము కావాలంటే ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము $ab^{-1} \in H \forall a, b \in H$ అని చూపండి.

OR

b) State and prove Lagrange's theorem.
లెగ్రాంజి సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి మరియు నిరూపించండి.

11. a) If G is a group and H is a subgroup of index 2 in G then prove that H is a normal subgroup of G.
G ఒక సమూహము మరియు G లో ఉపసమూహము H యొక్క సూచి '2' అయిన H అభిలంబ ఉపసమూహము అవుతుందని నిరూపించండి.

OR

b) Define Quotient group. Prove that the set $\frac{G}{H}$ of all cosets of H in G w.r.t. coset mutliplication is a group.
వ్యుత్పన్న సమూహమును నిర్వచించండి. సమూహము G లో H యొక్క అన్ని సహసమితుల సమితి $\frac{G}{H}$, సహసమితుల గుణకారము దృష్ట్యా సమూహము అవుతుందని చూపండి.

[P.T.O.

12. a) Prove that the necessary and sufficient condition for a homomorphism f of a group G onto a group G' with Kernel K to be an isomorphism of G into G' is $\text{Ker} f = \{e\}$.

సమూహము G నుండి G' కు నిర్వచింపబడిన సంగ్రస్త సమరూపత f, G నుండి G' కు తుల్యరూపంలో అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $\text{Ker} f = \{e\}$ అని నిరూపించండి.

OR

b) State and prove Fundamental theorem of homomorphism of groups.

సమూహాల సమరూపతా మూల సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి మరియు నిరూపించండి.

13. a) State and Prove Cayley's theorem.

కేలీ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి మరియు నిరూపించండి.

OR

b) Show that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

ఒక చక్రీయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉపసమూహము చక్రీయము అని చూపండి.

XXXX